

建物寿命の年齢別データによる推計に関する基礎的考察

SOME THEORETICAL STUDIES ON MAKING A LIFE TABLE OF BUILDINGS

小松 幸夫*
Yukio KOMATSU

In this paper, I have studied some theoretical aspects of the method for estimating the distribution of buildings life time using age grouped survival and demolished data. In former papers, I and co-authors used a variation of so-called "accumulated hazard method" in the reliability theories. But considering the continuity of the remaining function, I have found that another method, which is similar to the one used in ordinary life time examinations, is also more appropriate in case of making life table or synthesizing age grouped death rate data. This process is computerized and some other programs, like calculating reliable range of the results or estimating the parameters of the remaining function forms, have been developed.

Keywords: life time, reliability, housing statistics
耐用期間, 信頼性, 住宅統計

1. はじめに

これまでに筆者らは、固定資産台帳のデータを利用して各種の建物についての寿命分布実態の調査を行ってきた。得られる基礎資料は新築年次別の現存棟数と除却棟数であり、分析方法としては人間の生命表作成の考えかたと信頼性工学における累積ハザード法を援用したものを用いてきた。この場合、扱うデータは通常の信頼性解析などで用いられているものとは異なり、年齢別のデータを合成して一連のものともみなす方法によっているために、分析の方法論に関して若干の考察を加えておく必要があると思われる。本研究では、従来はややあいまいなままにしていた残存率関数の連続性という点を重視して考察をおこない、従来の方法の弱点を補うとともに、シミュレーションによる信頼幅の推定、および最小二乗法による分布形の当てはめ、すなわち分布パラメータの推定について述べることにする。

2. 故障密度関数と残存率関数

はじめに信頼性理論の一般的な概念について述べておく¹⁾。関数 $R(t)$ が建物集団の時間 t における残存割合を表し、関数として連続で微分可能であるとする。このとき、以下のように関数を定義する。

$R(t)$: 信頼度関数 (または残存率関数)

$F(t)$: 不信頼度関数 (または累積減失率関数)

$f(t)$: 故障密度関数

$\lambda(t)$: 故障率関数

各関数には次のような関係がある。

$$F(t) = 1 - R(t) \dots \dots \dots (1)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \dots \dots \dots (2)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \dots \dots \dots (3)$$

ゆえに $R(t)$ と $\lambda(t)$ の間には、次のような関係が成立する。

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{-dR(t)}{dt}$$

両辺を積分して

$$-\int \lambda(t) dt + C_1 = \ln(R(t))$$

ゆえに

$$R(t) = C \cdot \exp \left\{ -\int \lambda(t) dt \right\}$$

ところで $t \geq 0$ かつ $t=0$ において $R(t) = R(0) = 1$ であるから、 $C=1$ となり

$$R(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \lambda(x) dx \right\} \dots \dots \dots (4)$$

となる。

また

$$H(t) = \int_0^t \lambda(x) dx \dots \dots \dots (5)$$

を累積ハザード関数という。

$\lambda(t) = \lambda$ すなわち $\lambda(t)$ が一定のときは

* 横浜国立大学工学部建設学科 助教授・博士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering Yokohama National Univ., Dr. Eng.

$$R(t) = \exp(-\lambda t) \dots\dots\dots (6)$$

という形になり、信頼性工学における基本的な分布である指数分布となる。また故障密度関数が次のような形をしている場合がよく知られている。

正規分布の場合

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$R(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx \dots\dots (8)$$

対数正規分布の場合

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} t} \exp\left\{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$R(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx \dots\dots\dots (10)$$

ワイブル分布の場合

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^m\right\} \dots\dots (11)$$

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t-\delta}{\eta}\right)^m\right\} \dots\dots\dots (12)$$

これ以外にもいくつかの分布関数が知られているが、本研究で扱うのは以上の分布関数である。

3. 年齢別現存および減失データの特徴

図-1 は年齢別データにおける個々の建物の状況を図式化したものである。図の K_0 と K_1 は観察時点を表し、横軸は時間の経過を、縦軸は年齢を表す軸である。個々の建物の存続は図中の斜線（以下「存続線」と呼ぶ）で表現されていて、時間軸（横軸）と交わる点は竣功時点を表し、右上の○印は観察時点における「残存」（または「観察打ち切り」）を、三角印は途中の時点における「減失」を表すものとする。したがって存続線の長さは個々

の建物の存続年数に比例していることになる。また存続線上の一点の時間軸への投射点は暦日としての時点を、また年齢軸への投射点はその時点における年齢を表すものとする。観察時点 K_0 において資料から得られるのは、時点（時間軸上の一点） K_1 を通過する存続線の数すなわち時点 K_1 における現存建物数、時点 K_1 から K_0 の間に新築された建物数、および時点 K_0 と K_1 の縦線で囲まれた部分における三角印の数すなわち時点 K_0 と K_1 の間の減失建物数である。これらを、 K_0 と K_1 の時間間隔を一年として、年次別または年度別に集計したものが本研究でいう年齢別現存および減失データである。

通常の寿命試験データの分析では、同時点に作動を開始したサンプルを対象とするのであるが、年齢別データ

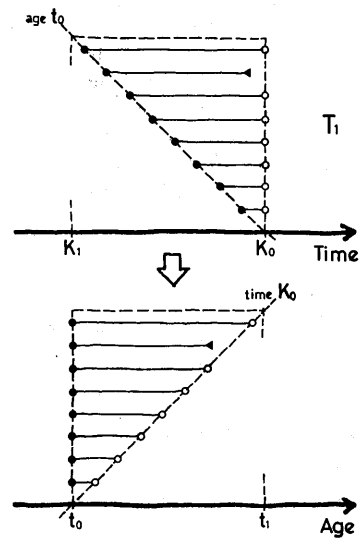


図-2.1 時間軸から年齢軸への変換 (T_1)

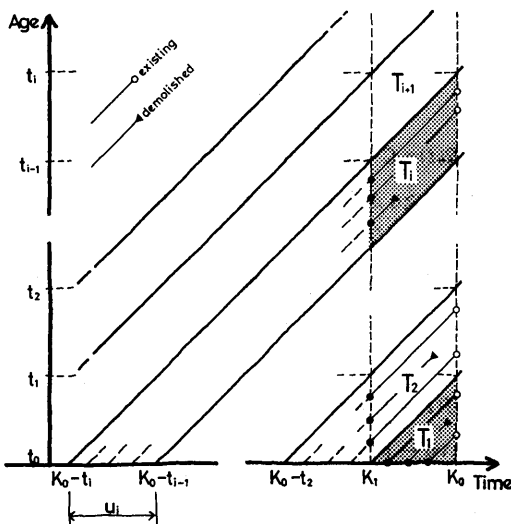


図-1 年齢別データの概念図

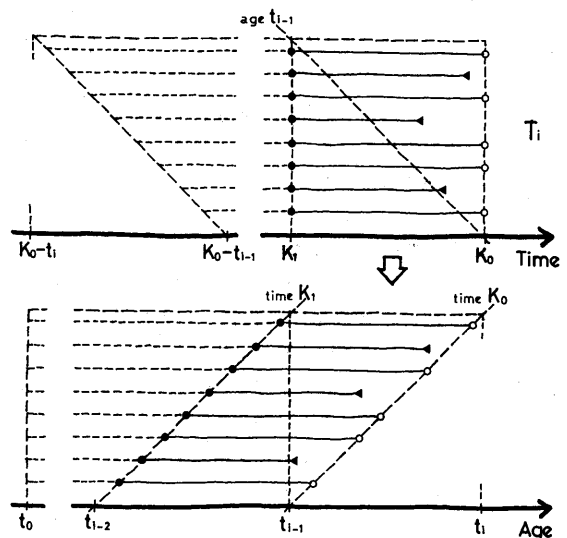
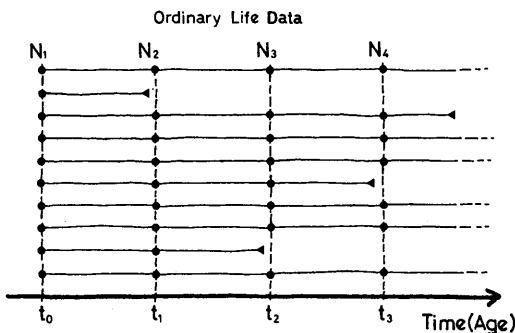


図-2.2 時間軸から年齢軸への変換 (T_i)

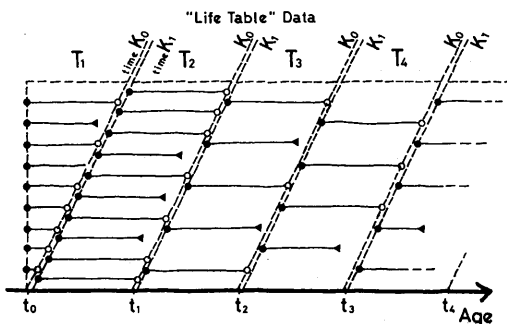
を用いて寿命を予測する場合は、ある観察時点における年齢別の観察結果を年齢順に合成して一連のデータとする形をとることになるので、通常の場合とはデータの扱い方を若干変える必要がある。図—2.1および図—2.2の上半分は、それぞれ新築年次が時間軸上の区間 $(K_1, K_0]$ (これは時間を表す変数を t としたとき $K_1 < t \leq K_0$ を表すものとし、時間区間とよぶ) および時間区間 $(K_0 - t_i, K_0 - t_{i-1}]$ に含まれる建物を、竣功時点の新しい順に積み上げたものであるが、それを年齢順に並べ変えると図—2.1および図—2.2の下半分のようにになる。時間軸でみた場合には「観察打ち切り時点」は同一であるが、竣功から時点 K_0 にいたる時間の長さが異なるので、年齢軸でみた場合の「観察打ち切り年齢」は同一ではないことに注意する必要がある。

4. 残存確率の推定方法

通常の観察データの場合には、出発時点が同じであるから時間軸と年齢軸は一致しており、故障あるいは滅失が発生した時点で推定される残存率は、同時に年齢軸上の推定残存率となっている。図—3.1において時点 t_1 における残存率 (残存確率) は、時点 t_0 ($=0$) における残存数 N_1 に対する時点 t_1 における残存数 N_2 の比で表される。後者は前者から時間あるいは年齢の区間 $(t_0, t_1]$ における滅失数 d_1 を引いたものであるから、区間 $(t_0, t_1]$ での残存確率を $\Pr\{t_1|t_0\}$ という記号で表すと



図—3.1 通常の寿命試験データの概念図



図—3.2 「生命表」式データの概念図

$$\Pr\{t_1|t_0\} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_1 - d_1}{N_1}$$

となる。同様に区間 $(t_{i-1}, t_i]$ における残存確率 (時点 t_{i-1} まで残存したものが、次の時点 t_i まで残存する条件付確率) を $\Pr\{t_i|t_{i-1}\}$ とすると

$$\Pr\{t_i|t_{i-1}\} = \frac{N_i - d_i}{N_i}$$

となる。区間 $(t_0, t_i]$ における残存率、すなわち時点 t_0 から時点 t_i に至るまでの残存確率は、周知のように各区間の残存確率を掛けあわせたものとなるから

$$\Pr\{t_i|t_0\} = \Pr\{t_1|t_0\} \cdots \Pr\{t_{i-1}|t_{i-2}\} \cdots \Pr\{t_i|t_{i-1}\} \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

となる。一般に同一集団について滅失過程の観察を続ける場合、時点 $t_0, t_1, \dots, t_{i-1}$ における残存数をそれぞれ $N_1, N_2, \dots, N_{i-1}$ とし、区間 $(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{i-1}, t_i]$ における滅失数を $d_1, d_2, \dots, d_i$ とすると

$$N_2 = N_1 - d_1$$

$$N_3 = N_2 - d_2$$

$$\vdots$$

$$N_{i+1} = N_i - d_i$$

という関係がなりたつ。したがって、

$$\begin{aligned} \Pr\{t_i|t_0\} &= \frac{N_1 - d_1}{N_1} \cdots \frac{N_{i-1} - d_{i-1}}{N_{i-1}} \cdot \frac{N_i - d_i}{N_i} \\ &= \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{N_3}{N_2} \cdots \frac{N_i}{N_{i-1}} \cdot \frac{N_{i+1}}{N_i} \\ &= \frac{N_{i+1}}{N_1} \cdots \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

となる。 $t_1, t_2, \dots, t_i$ の時点の決めかたは任意であるから、1件の故障あるいは滅失が生じた時点を区切りとすることで、上述の方法により残存確率関数の理論的な連続性を考慮した残存確率の推定が可能となる¹⁾。ただし途中で観察を打ち切ったデータのある場合などは別の推計方法を考慮しなければならないが、詳細は専門書に譲る。

5. 年齢別データによる残存率の推計

図—1の時点 K_1 における各新築年次別の建物残存数を N_i とし (ただし N_1 は時点 K_1 から K_0 の間に新築された建物数)、時間区間 $(K_1, K_0]$ における各新築年次別の滅失建物数を d_i とする。これらは資料から直接得られる数値である。図—3.2は年齢別データによる残存確率の推計方法を図式として表現したものである。図—2.1および図—2.2で示したように、時間軸上の境界 (時点 K_0, K_1) は年齢軸でみると斜線で表されることになる。ここで図—3.2で T_1 あるいは T_i で表される区間における (条件付き) 残存確率の推定方法を考察する。これらは通常の場合でいうと、観察開始時間が異なり、かつ途中打ち切りデータを多数含む場合ということにな

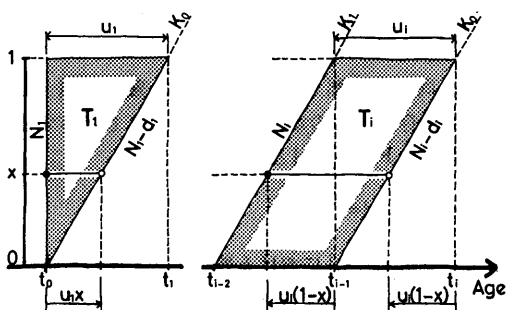


図-4 残存確率の推計方法

り、上述した方法はそのままでは適用しにくい。

まず、残存率関数 $R(t)$ の存在を仮定する。また $u_i = t_i - t_{i-1}$ とする。図-4 は図-3.2 の T_1 および T_i の部分を取りだしたもので、年齢は垂直線で、時点 K_0 あるいは K_1 は斜線で表されている。まず T_1 において、年齢 t_0 ($=0$) から時点 K_0 に至った時の残存確率 $\Pr[K_0|t_0]$ を考える (図-4 左)。 T_1 について年齢 t_0 における建物の棟数を N_1 とし、時点 K_0 での棟数を $N_1 - d_1$ とすると

$$\Pr[K_0|t_0] \approx \frac{N_1 - d_1}{N_1} \quad (15)$$

である。 T_1 に含まれる任意の建物が、年齢 t_0 から時点 K_0 に至るまでの経過時間を $u_1 x$ とすると、この建物が時点 K_0 で残存している確率は $R(u_1 x)$ である。したがって N_1 を N 、 x を x_i として

$$\Pr[K_0|t_0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R(u_1 x_i) \quad (16)$$

である。個々の建物の新築時点は T_1 の中ではほぼ均等に分布しており、かつ N が十分大きいものとする、 x は $(0, 1]$ の範囲で変化する。さらに $\frac{1}{N} \rightarrow dx$ として (16) 式右辺を積分に置きかえると、

$$\Pr[K_0|t_0] = \int_0^1 R(u_1 x) dx \quad (17)$$

となる。(17) 式右辺は台形法により、

$$\begin{aligned} \int_0^1 R(u_1 x) dx &\approx \frac{1}{2} \{R(0) + R(t_1)\} \\ &(\because u_1 \cdot 1 = (t_1 - 0) \cdot 1 = t_1) \\ &= \frac{1}{2} \{1 + R(t_1)\} \quad (\because R(0) = 1) \end{aligned} \quad (18)$$

と近似される。よって (15), (17), (18) 式より

$$\frac{1}{2} \{1 + R(t_1)\} \approx \frac{N_1 - d_1}{N_1}$$

となり、

$$R(t_1) \approx \frac{N_1 - 2d_1}{N_1} \quad (19)$$

を得る。

T_i (ただし $i \geq 2$) においては時点 K_1 における現存棟

数を N_i 、 K_0 における残存棟数を $N_i - d_i$ とすると

$$\Pr[K_0|K_1] \approx \frac{N_i - d_i}{N_i} \quad (20)$$

である (図-4 右)。ここで $R(t_{i-1})$ と $R(t_i)$ の関係をもとめるために、 T_1 の場合と同様に任意の建物の時点 K_0 における残存確率を考える。これは、年齢 $t_{i-1} - u_i(1-x)$ まで残存した建物が、年齢 $t_i - u_i(1-x)$ まで残存する条件付き確率であるから

$$\frac{R(t_i - u_i(1-x))}{R(t_{i-1} - u_i(1-x))}$$

で表される。したがって T_i 全体では T_1 の場合と同様に

$$\Pr[K_0|K_1] = \int_0^1 \frac{R(t_i - u_i(1-x))}{R(t_{i-1} - u_i(1-x))} dx \quad (21)$$

が成立する。 u_i が小さい場合に故障率 $\lambda(t)$ はほぼ一定とみなせるもの、すなわち $R(t) \approx \exp(-\lambda t)$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{R(t_i - u_i(1-x))}{R(t_{i-1} - u_i(1-x))} &\approx \frac{\exp[-\lambda(t_i - u_i(1-x))]}{\exp[-\lambda(t_{i-1} - u_i(1-x))]} \\ &= \frac{\exp(-\lambda t_i)}{\exp(-\lambda t_{i-1})} \\ &\approx \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} \end{aligned}$$

となつて x によらなくなるので、(21) 式は

$$\Pr[K_0|K_1] \approx \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} \quad (22)$$

とすることができる。ゆえに (20) 式と (22) 式より

$$\begin{aligned} \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} &\approx \frac{N_i - d_i}{N_i} \\ R(t_i) &\approx R(t_{i-1}) \cdot \frac{N_i - d_i}{N_i} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

$R(t_i)$ の推定値を R_i と表記することにする、

$$R_1 = \frac{N_1 - 2d_1}{N_1} \quad (24)$$

$$R_i = R_1 \cdot \prod_{x=2}^i \frac{N_x - d_x}{N_x} \quad (i \geq 2) \quad (25)$$

を得る。この方法を仮に「区間残存率推計法」と呼ぶことにする。年齢区間 $(t_{i-1}, t_i]$ における滅失確率を q_i とすると、(24) 式から

$$q_1 = 1 - R_1 = \frac{2d_1}{N_1} \quad (26)$$

となる。また (23) 式から

$$\Pr[t_i|t_{i-1}] = \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} = 1 - \frac{d_i}{N_i} \quad (i \geq 2) \quad (27)$$

であり、 R_i に対応して

$$q_i = 1 - \Pr[t_i|t_{i-1}] = \frac{d_i}{N_i} \quad (28)$$

が導かれる。筆者らが既報で用いた方法は d_i を 1 年間の滅失数とし、

$$\lambda_i = \frac{d_i}{N_i}$$

として、前述した(5)式の累積ハザード関数を

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t \lambda(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^t \lambda_i \cdot u_i \\ &= \sum_{i=1}^t \lambda_i \quad (\because u_i=1) \end{aligned}$$

と近似したものである。これは図—1の T_i を時間軸上の一点とみなして故障率を推定し、累積ハザード関数の積分を故障率 λ_i と単位時間長さの積の総和で置きかえたことに相当するので、「累積ハザード関数近似法」と呼ぶことにする。このとき(4)式から、

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\{-H(t)\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{i=1}^t \lambda_i\right\} \\ &= \prod_{i=1}^t \exp(-\lambda_i) \end{aligned}$$

となる。マクローリン展開によって

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$$

であり、 $0 < x \leq 1$ のとき第2項以降を無視すると

$$\begin{aligned} \Pr\{t_i | t_{i-1}\} &= 1 - \lambda_i \\ &= \exp\{\ln(1 - \lambda_i)\} \\ &< \exp(-\lambda_i) \end{aligned}$$

という関係が数学的に導かれることから、従来の「累積ハザード関数近似法」では、やや大きめの残存確率推定値が得られることがわかる。実際のデータを今回述べた「区間残存率推計法」で分析した結果と「累積ハザード関数近似法」による分析結果の比較を表—1に示す。使用したデータは1982年の全国木造専用住宅²⁾、1985年の東京都中央区鉄筋コンクリート造事務所、おなじく鉄骨造事務所のデータである³⁾。木造専用住宅でみると、50%残存率では「区間残存率推計法」の方が「累積ハザード関数近似法」よりおよそ0.3年短くなっている。なお、鉄筋コンクリート造事務所と鉄骨造事務所については、

表—1 推計方法の違いによる各残存率年数の比較

残存率	木造専用住宅 1982/全国		鉄筋コンクリート造事務所 1985/東京都中央区		鉄骨造事務所 1985/東京都中央区	
	A	B	A	B	A	B
0.90	18.716年	18.748年	5.697年	19.977年	6.776年	13.484年
0.80	23.720	23.793	11.045	26.202	11.363	16.525
0.70	28.191	28.312	22.135	28.277	16.032	18.909
0.60	32.759	32.951	26.763	31.080	18.910	20.992
0.50	37.692	37.968	30.606	33.294	21.559	22.944
0.40	43.778	44.209	33.155	34.779	23.886	33.402
0.30	53.298	53.881	34.921	37.567	29.744	33.937
0.20	66.338	67.025	37.034	38.372	31.683	***
0.10	86.954	87.806	38.034	56.012	33.736	***

A: 区間残存率推計法 (特殊ケースの補正あり)
B: 累積ハザード関数近似法 (特殊ケースの補正なし)
(***: 計算不能)

表—2 東京都中央区固定資産台帳による1985年の現存棟数および除却棟数

鉄筋コンクリート造事務所 1985/東京都中央区						鉄骨造事務所 1985/東京都中央区					
経年	現存棟数	除却棟数	経年	現存棟数	除却棟数	経年	現存棟数	除却棟数	経年	現存棟数	除却棟数
1	27	0	36	5	0	1	57	0	36	3	1
2	29	0	37	1	0	2	43	0	37	1	0
3	36	0	39	1	0	3	42	0	38	2	0
4	23	0	40	1	0	4	30	0	31	1	0
5	18	0	46	2	0	5	30	0	56	1	0
6	37	0	47	8	0	6	39	0			
7	29	0	48	4	0	7	35	0			
8	24	0	49	3	0	8	27	0			
9	27	1	50	11	0	9	31	0			
10	28	0	51	9	0	10	17	0			
11	23	0	52	7	0	11	22	1			
12	81	1	53	8	2	12	59	1			
13	87	0	54	11	0	13	73	0			
14	83	0	55	14	0	14	50	1			
15	96	0	56	30	3	15	54	4			
16	83	0	57	57	6	16	57	1			
17	67	1	58	36	2	17	33	1			
18	76	1	59	16	1	18	35	1			
19	81	0	60	2	0	19	30	3			
20	70	2	61	7	1	20	29	1			
21	70	2	62	5	0	21	27	3			
22	100	0	63	5	0	22	29	1			
23	89	1	64	1	0	23	32	5			
24	99	1	65	1	0	24	24	1			
25	84	1	66	2	0	25	18	0			
26	88	3	67	2	1	26	11	0			
27	91	10	68	1	0	27	13	0			
28	78	3	76	2	0	28	17	0			
29	86	2				29	9	0			
30	48	1				30	3	0			
31	18	2				31	2	0			
32	29	2				32	1	0			
33	26	2				33	3	0			
34	20	3				34	2	1			
35	20	3				35	2	0			

注) 「経年1」は「経年0年～1年未満」を表わす。
経年数値のない部分は、現存・除却ともに棟数0である。

推計方法の違いとともに、次に述べる特殊ケース補正による影響がかなり表れている。参考までに表—2に、固定資産台帳に基づく鉄筋コンクリート造事務所と鉄骨造事務所の経年別現存(残存)棟数と除却(減失)棟数を示す。なお木造専用住宅のデータについては文献1)を参照されたい。

6. 特殊ケースの扱い

今回の分析例にも若干含まれるが、ここでいう特殊ケースとは次のような場合である。

- 1) ある年齢区間に含まれる建物の残存数が0の場合(記号で表すと $N_i=0$ したがって $d_i=0$ の場合で空白区間と呼ぶ)
- 2) ある年齢区間に含まれる建物の残存数と減失数が等しい時 ($d_i=N_i$ の場合)
- 3) ある年齢区間に含まれる建物の減失数が0の時 ($d_i=0$ の場合)

まず1) の場合については、震災などの事情で建物がほとんど建てられなかったり、建てられて早々に失われた場合などによく生じる問題である。具体的にはわが国では、第二次大戦およびその前後を含む時期に新築年がぶつかる建物などが相当する。データによる残存確率はこの部分で不連続となるので、残存率関数の推定は理論的にはその時点で途切れることになるが、実用上はなんとか連続させる方法を考える必要がある。本研究では、その区間より大きな年齢の区間で残存数が0ではないも

ののうち、年齢が最も近いものの残存数と減失数を空白区間にあてることとした。こうすることで、データがある年齢幅にわたって（たとえば5年間隔など）集約されて記録されているような場合においても、分析プログラム上の対応が容易になる利点がある。

2) は、何らかの偶発的な事情（災害など）で残存数と減失数がおなじになった場合、そのまま計算するとその時点で残存率関数の値が0になるので、以後の年齢については残存建物のデータがあっても、残存率関数の上では存在する建物はないという矛盾を生じるケースである。減失の原因が明確な場合にはそのデータを集計から外すことも考えられるが、それができない場合に推定値として計算される減失確率1は、真の減失確率に対しては過大評価となっている危険があると考えられる。

3) は2) とは逆に、真の減失確率が小さく、かつ残存数が少ない場合におこる問題である。減失数は整数であるから、たとえば真の減失確率を0.04、観察された残存数を12とすると理論的な減失数は0.48となるので、観察結果は0となって表れることが考えられる。この場合に推定減失確率を、観察された減失数を残存数で割った値の0と評価することは過少評価である可能性が高いと考えられる。

2), 3) は可能であれば調査対象範囲を広げるなどのことで避けるべき問題であるが、やむをえない場合に限り次のような処置をとることとする。結論的には、2) の場合には減失確率 q_i を (26) 式、(28) 式にかかわらず

$$\hat{q}_i = \frac{N_i + 0.5}{N_i + 1} \dots\dots\dots (29)$$

に置きかえ、また3) の場合には

$$\hat{q}_i = \frac{0.5}{N_i + 1} \dots\dots\dots (30)$$

に置きかえて R_i を計算することとした。これは次のような考えかたによる。

成功確率が p のベルヌーイ試行を n 回行う場合を考える。成功回数が d (n, d は整数) である確率 $\Pr\{d\}$ は二項分布の密度関数として

$$\begin{aligned} \Pr\{d\} &= {}_nC_dp^d(1-p)^{n-d} \\ &= \frac{n!}{(n-d)!d!} p^d(1-p)^{n-d} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

で表される。同様に成功回数が $d+1$ 回、 $d-1$ 回である確率はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Pr\{d+1\} &= {}_nC_{d+1}p^{d+1}(1-p)^{n-d-1} \\ &= \frac{n!}{(n-d-1)!(d+1)!} p^{d+1}(1-p)^{n-d-1} \\ &\dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\Pr\{d-1\} = {}_nC_{d-1}p^{d-1}(1-p)^{n-d+1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{(n-d+1)!(d-1)!} p^{d-1}(1-p)^{n-d+1} \\ &\dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

と表される。ここで p を未知数と考え、成功回数が d となる確率が最大であるという条件から p の範囲をもとめると、 $\Pr\{d\} > \Pr\{d+1\}$ および (31) 式と (32) 式から

$$\frac{\Pr\{d\}}{\Pr\{d+1\}} > 1$$

すなわち

$$\frac{d+1}{n-d} \cdot \frac{1-p}{p} > 1$$

これを p について解くと

$$p < \frac{d+1}{n+1}$$

を得る。

$\Pr\{d\} > \Pr\{d-1\}$ より (31) および (33) 式から同様にして

$$p > \frac{d}{n+1}$$

を得る。よって

$$\frac{d}{n+1} < p < \frac{d+1}{n+1} \dots\dots\dots (34)$$

となる。減失確率 q_i の推定に際しては、 $d_i=0$ や $d_i=n_i$ のような特殊な場合に限って、 q_i の推定値として (34) 式の p の範囲の平均値をとって

$$\hat{q}_i = \frac{d_i + 0.5}{N_i + 1}$$

を与えることとした。なお、

$$\lambda_i = \frac{d_i}{N_i} \dots\dots\dots (35)$$

は、二項分布 $B(N_i, p)$ に従う成功回数観察値 d_i からの、 p についての不偏かつ最尤推定値とされる⁴⁾。

7. 信頼幅の推定

調査から得られた各新築年次別の建物の残存数 N_i を、年齢 t_{i-1} における残存棟数とする。このとき個々の建物が年齢区間 $(t_{i-1}, t_i]$ の間に減失するかどうかは互いに独立な事象であるとする、年齢区間 $(t_{i-1}, t_i]$ における減失数はベルヌーイ試行によって得られると考えられる。これを x_i とすると、 x_i は二項分布に従う確率変数と考えることができ、次に示すような手順によって残存率曲線の信頼幅が推定できる。なお年齢区間 $(t_{i-1}, t_i]$ における減失確率の推定値としては、(26) 式および (28) 式から得られる q_i を用いるものとする。

まず計算機の中で一様乱数を発生させ、それを $B(N_i, q_i)$ にしたがう二項分布乱数 x_i (整数) に変換する。 x_i と観察で得られた N_i とを用いて、

$$\hat{R}_i = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{x_j}{N_j}\right)$$

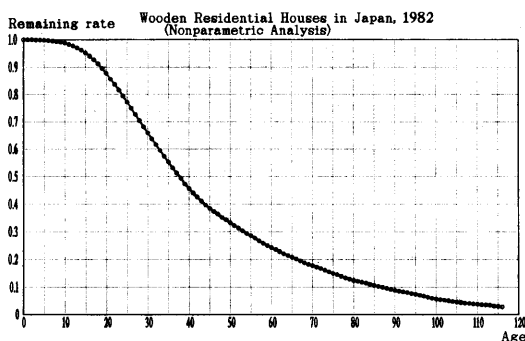


図-5.1 木造専用住宅の残存率

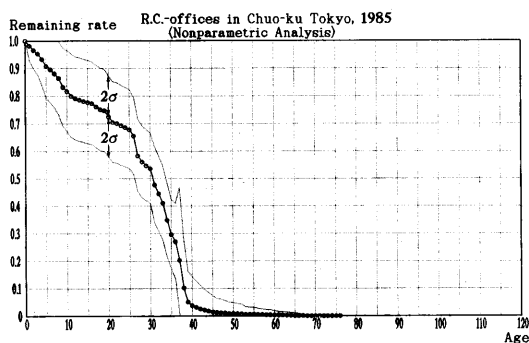


図-5.2 鉄筋コンクリート造事務所の残存率

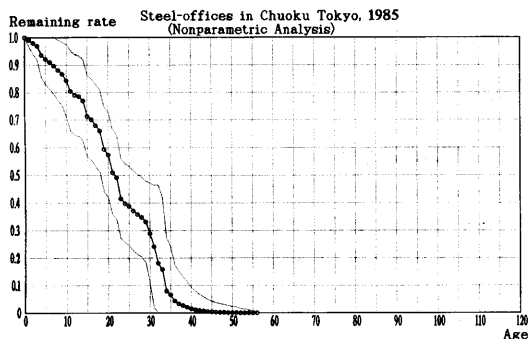


図-5.3 鉄骨造事務所の残存率

から経年別残存率を求める。この計算を一定回数くりかえし（本研究では10000回とした）、結果を統計処理すると必要な水準における信頼幅が求められることになる。なお q_i は、年齢軸と時間軸のずれや特殊条件についてはすでに調整済なので、(26) 式あるいは (29)、(30) 式のような調整を行う必要はない。また作成したプログラムでは、計算効率を高めるため一部で二項分布をポアソン分布あるいは正規分布で近似して処理を行っている。二項分布の特性から、一般的傾向として N_i が小さいほど残存率曲線のバラツキは大きくなると考えられるが、3種類のデータについて分析した結果の図-5.1 から図-5.3 では、そうした傾向が読みとれる。すなわち、図中の破線は各年齢における残存率の平均値から $\pm 2\sigma$

(σ は標準偏差) の範囲をしめすが、年齢ごとの残存数が多い木造住宅の場合はバラツキが小さく、逆に残存数が比較的少ない鉄筋コンクリート造や鉄骨造の事務所の例ではバラツキが大きいことがわかる。なお各年齢における残存率の分布は、計算の結果では歪度がほぼ0、尖度がほぼ3となり、おおむね正規分布に従うと考えられるので、 $\pm 2\sigma$ の範囲は、信頼係数にして約95%に相当することになる。

8. 分布パラメータの推定

以上は残存率関数、あるいは故障密度関数などの分布形を考えない分析の方法（以下ノンパラメトリック法と呼ぶ）である。観察できる資料の新築年次すなわち年齢の上限が限られている場合には、適当な分布関数を当てはめて高年齢における残存率を外挿により求める必要を生じることがある。たとえば各年齢の建物についての平均余命を求める場合などである。この場合、基本は (19) ~ (21) 式によって $R(t)$ の関数形を求めるのであるが、 $R(t)$ の形によっては解（パラメータ）を求めるのは困難である。ここでは最小二乗法の考えかたを応用し、観察データに前述の正規分布、対数正規分布、ワイブル分布を当てはめてみることにする。分布関数のパラメータを仮に α, β, γ とし、時間を表す変数を x ($0 \leq x \leq t$) として以下の関数を定義する。

$R(\alpha, \beta, \gamma, x)$: 残存率関数。単に $R(x)$ と表記することもある。

$f(\alpha, \beta, \gamma, x)$: 故障密度関数。単に $f(x)$ と表記することもある。

R_x : ノンパラメトリック法による残存率。(ただし $x=0, 1, 2, \dots, t$ である)

最小二乗法は、

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{x=1}^t \frac{1}{\sigma_x^2} \{R(\alpha, \beta, \gamma, x) - R_x\}^2$$

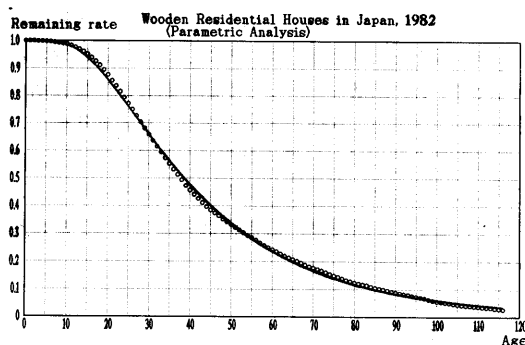
σ_x^2 : x における誤差分散。すなわち $\{R(x) - R_x\}^2$ の分散

で表される残差二乗和 $S(\alpha, \beta, \gamma)$ を最小とするようなパラメータ α, β, γ の推定値を求めることである⁵⁾。 $x=1, 2, \dots, t$ における誤差分散 σ_x^2 は未知であるが、ここでは x に関係なく等しいものと仮定する。この場合、上式を次のように書き直して最小値を考えても同じことである。

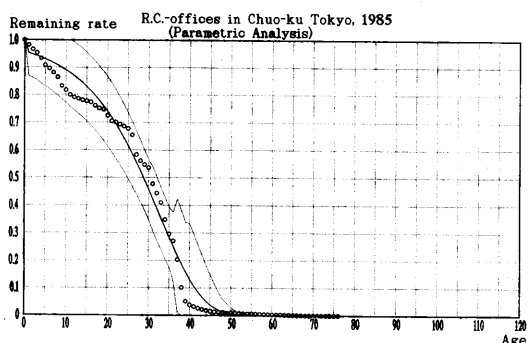
$$S'(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{x=1}^t \{R(\alpha, \beta, \gamma, x) - R_x\}^2 \dots \dots \dots (36)$$

$S'(\alpha, \beta, \gamma) = S$ とすると、 S を最小とするためには、

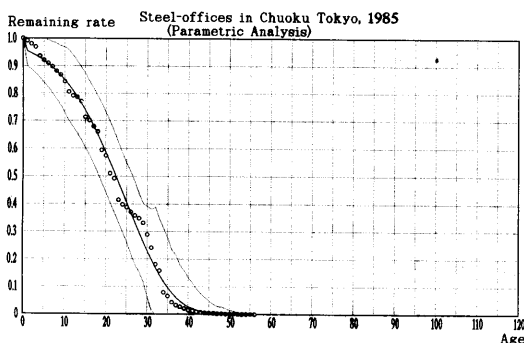
$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (37)$$



図—6.1 木造専用住宅の残存関数の推定



図—6.2 鉄筋コンクリート造事務所の残存率関数の推定



図—6.3 鉄骨造事務所の残存率関数の推定

を満たす α, β, γ を求めればよいことになる。これらは解析的に解を求めることが困難であるので、計算機による近似的な解法を適用する必要がある。さらに二階の偏微分係数を求めて、ニュートン・ラフソン法を適用するのが一般的な方法であるが、初期値の与えかたが適切でないとき解が発散する危険がある。本研究においては、まず α, β, γ の値を変化させて、 S の値が小さくなる変化の方向を捜していく方法（直接探索法）により、精度の粗い初期値を求めたうえで、ニュートン・ラフソン法により解を求めることとしてフォートランによる計算プログラムを作成した⁶⁾。間隔を細かくとりすぎると丸め誤差などの影響が危惧されることと、計算時間などを考慮して計算に用いる時点は最大 50 点とした。それを越え

表—3 最小二乗法による分布形およびパラメータの推定結果

	木造専用住宅 1982/全国	鉄筋コンクリート造事務所 1985/東京都中央区	鉄骨造事務所 1985/東京都中央区
計算時点間隔	3年(36点)	2年(36点)	2年(28点)
正規分布			
μ	41.8304338	27.3258747	21.9033390
σ	24.4408000	12.7315253	10.9071195
残差二乗和(S)	0.1150357	0.1340257	0.0206880
対数正規分布			
μ	3.6541439	3.3010058	3.0342432
σ	0.6131111	0.3932360	0.4668214
残差二乗和(S)	0.0035235	0.2861856	0.0915837
ワイブル分布A			
m	1.7462803	2.7192377	2.3090615
位置パラメータなし	49.7612001	31.7208734	25.2088898
残差二乗和(S)	0.0397879	0.1706199	0.0357954
ワイブル分布B			
m	1.0701513	5457.9837894*	7.2756183**
η	32.2237870	57271.4281375*	72.8575997**
δ	15.2268073	-57238.8711747*	-46.8932409**
残差二乗和	0.0048543	0.0606346	0.0142109

*: 計算不能により途中打ち切り

** : 収束不十分

る場合(経年 51 年以上の場合)は等間隔に時点を選んで、50 点以内になるようにした。なお実数はすべて倍精度とし、パーソナルコンピュータを使用した⁷⁾。上述の 3 例についての結果を表—3 および図—6.1~6.3 に示す。表—3 の鉄筋コンクリート造事務所と鉄骨造事務所の場合、残差二乗和が最小になるのはいずれも位置パラメータを考慮した 3 変数のワイブル分布で実用上の支障はないが、これらは計算の収束が不十分であり、もしこれらを不適当と考える場合には、いずれについても正規分布を採用すればよい。図—6.2, 6.3 の実線はワイブル分布の場合を描いている。表—3 に示される μ や σ などは (7)~(12) 式に同じである。なお図中の破線については次に述べる。

9. 分布関数の適合性の検討

得られた分布関数が元の観察データによるノンパラメトリックな分布に適合しているかどうかについては、ノンパラメトリック法で信頼幅を求めたと同様の考えかたで検討することができる。この場合、二項分布乱数のもととなる $B(N_i, \hat{q}_i)$ の $\hat{q}_i$ には、得られた残存率分布関数を $\hat{R}(x)$ として、次のような値を与えることとする(ただし分布関数によらず $\hat{R}(0)=1$ とする)。

$$\hat{q}_i = 1 - \frac{\hat{R}(i)}{\hat{R}(i-1)}$$

図—6.1~6.3 に示した破線が $\pm 2\sigma$ の範囲を表しており、ノンパラメトリックな分布がこの範囲に含まれていれば、得られたパラメトリックな分布は観察結果に適合していると判断してさしつかえないと思われる。

10. 結 語

年齢別データにおける時間軸と年齢軸の不一致を考慮し、年齢別データを合成して連続的なデータとして扱う方法を考察した。その結果として、(24) 式および (25) 式に示したような残存率の推定式を得た。また建物残存数が少ない場合に生じる三つの特殊なケース、すなわち、

ある年齢区間の建物残存数が0の場合、残存建物数と減失建物数が等しい場合、あるいは減失建物数が0の場合にそれぞれの残存確率の推定値の与えかたについての考察をおこなった。実例の分析結果では、今回考察した「区間残存率推定法」は従来用いていた「累積ハザード関数近似法」と比較すると若干低めの残存率推定値をあたえるものの、大差ない結果が得られることがわかった。また最小二乗法による分布関数のパラメータ推定のプログラムを開発し、残存率曲線の記述の簡略化や外挿、あるいは平均余命の計算などを可能とした。なお特殊ケースの扱いについては暫定的なものであり、その妥当性について今後さらに検討を加える必要があると思われる。

謝 辞

本研究は財団法人・住宅総合研究財団の補助による研究を基礎としたものである。分布パラメータ推定プログラムの作成に当たっては、松本光平氏（当時建設省建築研究所）より最小 χ^2 法による分布関数パラメータ推定のプログラムソースを含めて、いろいろとご教示をいただいた。ここに記して深く感謝の意を表したい。なお乱数発生プログラムの作成に当たっては、一部で東京大学大型計算機センターのライブラリプログラムを参考にした。

注

- 1) 参考文献3) による
- 2) 参考文献1) を参照
- 3) 参考文献2) を参照
- 4) 参考文献5) による
- 5) 参考文献6) による
- 6) 微分の具体的な形を参考のために示しておく。

$S(\alpha, \beta, \gamma) = S$, $R(\alpha, \beta, \gamma, x) = R(x)$, パラメータのふたつを α, β とすると、

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{x=1}^t [|R(x) - R_x| \frac{\partial R(x)}{\partial \alpha}] \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} = 2 \sum_{x=1}^t \left[\frac{\partial R(x)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial \beta} + |R(x) - R_x| \frac{\partial^2 R(x)}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \dots\dots\dots (39)$$

正規分布の場合は $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ として、式(8)より

$$\frac{\partial R(\mu, \sigma, x)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial R(\mu, \sigma, x)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot u \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 R(\mu, \sigma, x)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot u \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 R(\mu, \sigma, x)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot u(u^2 - 2) \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 R(\mu, \sigma, x)}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot (u^2 - 1) \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

なお対数正規分布の場合は、 x を対数変換すれば正規分布として扱える。

ワイブル分布の場合は $u = \frac{x - \delta}{\eta}$ として、式(12)より

$$\frac{\partial R(m, \eta, \delta, x)}{\partial m} = \log u \cdot u^m \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \eta} = -\frac{m}{\eta} \cdot u^m \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \delta} = -\frac{m}{\eta} \cdot u^{m-1} \cdot \exp(-u^m) \\ = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial m^2} = (\log u)^2 \cdot u^m (1 - u^m) \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \eta^2} = \frac{m}{\eta^2} \cdot u^m [1 + m(1 - u^m)] \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \delta^2} = \frac{m}{\eta^2} \cdot u^{m-2} [-1 + m(1 - u^m)] \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial m \partial \eta} = -\frac{1}{\eta} \cdot u^m [1 + m(1 - u^m) \cdot \log u] \cdot \exp(-u^m)$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial m \partial \delta} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial m \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 R(m, \eta, \delta, x)}{\partial \eta \partial \delta} = \frac{m}{\eta^2} \cdot u^{m-1} (1 - u^m) \cdot \exp(-u^m)$$

となる。これらを式(38)および(39)に代入すると必要な式が具体的に求められ、ニュートン・ラフソン法をもちいて(37)式を満足するパラメータ推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ を求めることができる。

- 7) コンパイラはNDP-Fortran, 計算機はインテル80386プロセッサおよび浮動小数点演算用コプロセッサを搭載したものを使用した。

参考文献

- 1) 加藤裕久, 小松幸夫: 木造専用住宅の寿命に関する調査研究, 日本建築学会計画系論文報告集, 第363号, pp.20~26, 1986.5
- 2) 野城智也, 加藤裕久, 吉田倬郎, 小松幸夫: 東京都中央区における事務所建築の寿命実態, 日本建築学会計画系論文報告集, 第413号, pp.139~149, 1990.7
- 3) 市田 嵩, 鈴木和幸: 信頼性の分布と統計, 日科技連, 1984
- 4) 渡部 力ほか監修: Fortran 77による数値計算ソフトウェア, 丸善, 1989
- 5) 竹内 啓, 藤野和建: 2項分布とポアソン分布, 東京大学出版会, 1981
- 6) 中川 徹, 小柳義夫: 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1987

(1992年3月9日原稿受理, 1992年6月12日採用決定)